

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ №2

З ДИСЦИПЛІНИ “МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ” ДЛЯ СТУДЕНТІВ ДЕННОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ
 “КОМП’ЮТЕРНІ СИСТЕМИ ТА МЕРЕЖІ”, “СПЕЦІАЛІЗОВАНІ КОМП’ЮТЕРНІ СИСТЕМИ” ТА “ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ АВТОМАТИЗОВАНИХ СИСТЕМ”
Завдання 1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

1.1. а) $4xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx$; б) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$; в) $y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}$.

1.3. а) $\sqrt{4+y^2} dx - ydy = x^2 ydy$; б) $y' = \frac{x+y}{x-y}$; в) $y' = \frac{3y-x-4}{3x+3}$.

1.5. а) $6xdx - 6ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx$; б) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$; в) $y' = \frac{x+y-2}{3x-y-2}$.

1.7. а) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x} = 0$; б) $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$; в) $y' = \frac{x+7y-8}{9x-y-8}$.

1.9. а) $6xdx - 6ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx$; б) $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$; в) $y' = \frac{3y+3}{2x+y-1}$.

1.11. а) $y(4+e^x)dy - e^x dx = 0$; б) $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$; в) $y' = \frac{x-2y+3}{-2x-2}$.

1.13. а) $x\sqrt{4+y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0$; б) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$; в) $y' = \frac{2x+3y-5}{5x-5}$.

1.15. а) $2xdx - 2ydy = x^2 y - 2xy^2 dx$; б) $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$; в) $y' = \frac{x+3y-4}{5x-y-4}$.

1.17. а) $6xdx - ydy = yx^2 dy - 3xy^2 dx$; б) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$; в) $y' = \frac{x+2y-3}{x-1}$.

1.19. а) $(1+e^x)y' = ye^x$; б) $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$; в) $y' = \frac{5y+5}{4x+3y-1}$.

1.21. а) $6xdx - 2ydy = 2yx^2 dy - 3xy^2 dx$; б) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$; в) $y' = \frac{x+y+2}{x+1}$.

1.23. а) $(3+e^x)yy' = e^x$; б) $y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$; в) $y' = \frac{2x+y-3}{2x-2}$.

1.25. а) $xdx - ydy = yx^2 dy - xy^2 dx$; б) $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$; в) $y' = \frac{x+5y-6}{7x-y-6}$.

1.2. а) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$; б) $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$; в) $y' = \frac{x+y-2}{2x-2}$.

1.4. а) $\sqrt{3+y^2} dx - ydy = x^2 ydy$; б) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$; в) $y' = \frac{2y-2}{x+y-2}$.

1.6. а) $x\sqrt{3+y^2} dx + y\sqrt{2+x^2} dy = 0$; б) $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$; в) $y' = \frac{2x+y-3}{x-1}$.

1.8. а) $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$; б) $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$; в) $y' = \frac{x+3y+4}{3x-6}$.

1.10. а) $x\sqrt{5+y^2} dx + y\sqrt{4+x^2} dy = 0$; б) $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$; в) $y' = \frac{x+2y-3}{4x-y-3}$.

1.12. а) $\sqrt{4-x^2} y' + xy^2 + x = 0$; б) $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$; в) $y' = \frac{x+8y-9}{10x-y-9}$.

1.14. а) $(e^x + 8)dy - ye^x dx$; б) $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$; в) $y' = \frac{4y-8}{3x+2y-7}$.

1.16. а) $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$; б) $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$; в) $y' = \frac{y-2x+3}{x-1}$.

1.18. а) $y \ln y + xy' = 0$; б) $2y' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$; в) $y' = \frac{3x+2y-1}{x+1}$.

1.20. а) $\sqrt{1-x^2} y' + xy^2 + x = 0$; б) $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$; в) $y' = \frac{x+4y-5}{6x-y-5}$.

1.22. а) $y(1+\ln y) + xy' = 0$; б) $xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$; в) $y' = \frac{2x+y-3}{4x-4}$.

1.24. а) $3(x^2 y + y)dy + \sqrt{2+y^2} dx = 0$; б) $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$; в) $y' = \frac{y}{2x+2y-2}$.

1.26. а) $\sqrt{5+y} dx + 4(x^2 y + y)dy = 0$; б) $xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$; в) $y' = \frac{x+y-4}{x-2}$.

$$1.27. \text{ а) } (1 + e^x) y y' = e^x; \text{ б) } y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 + 6xy}; \text{ в) } y' = \frac{2x + y - 1}{2x - 2}.$$

$$1.28. \text{ а) } 3(x^2 y + y) dy + \sqrt{2 + y^2} dx = 0; \text{ б) } xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y; \text{ в) } y' = \frac{3y - 2x + 1}{3x + 3}.$$

$$1.29. \text{ а) } 2x dx - y dy = yx^2 dy - xy^2 dx; \text{ б) } 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10 \frac{y}{x} + 10; \text{ в) } y' = \frac{6y - 6}{5x + 4y - 9}.$$

$$1.30. \text{ а) } 2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2} y' = 0; \text{ б) } xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y; \text{ в) } y' = \frac{x + 6y - 7}{8x - y - 7}.$$

$$1.31. \text{ а) } 20x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 5xy^2 dx; \text{ б) } y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}; \text{ в) } y' = \frac{y + 2}{2x + y - 4}.$$

Завдання 2. Знайти розв'язок задачі Коші.

$$2.1. \text{ а) } y' - \frac{y}{x} = x^2, y(1) = 0; \text{ б) } y' + xy = (1 + x)e^{-x} y^2, y(0) = 1;$$

$$\text{в) } y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x}, y(0) = 3, y'(0) = 0.$$

$$2.2. \text{ а) } y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}; \text{ б) } xy' + y = 2y^2 \ln x, y(1) = \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{(1 + e^{3x})}, y(0) = \ln 4, y'(0) = 3(1 - \ln 2).$$

$$2.3. \text{ а) } y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, y(0) = 0; \text{ б) } (xy' + y) = xy^2, y(1) = 2;$$

$$\text{в) } y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4.$$

$$2.4. \text{ а) } y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}; \text{ б) } y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2, y(0) = 1;$$

$$\text{в) } y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1 + e^{-2x}}, y(0) = 1 + 2 \ln 2, y'(0) = 6 \ln 2.$$

$$2.5. \text{ а) } y' - \frac{y}{x + 2} = x^2 + 2x, y(-1) = \frac{3}{2}; \text{ б) } xy' - y = -y^2 (\ln x + 2) \ln x, y(1) = 1;$$

$$\text{в) } y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{(1 + e^{-3x})}, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$2.6. \text{ а) } y' - \frac{1}{x + 1} y = e^x (x + 1), y(0) = 1; \text{ б) } 2(y' + xy) = (1 + x)e^{-x} y^2, y(0) = 2;$$

$$\text{в) } y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}, y\left(\frac{1}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

$$2.7. \text{ а) } y' - \frac{y}{x} = x \sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; \text{ б) } 3(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 3;$$

$$\text{в) } y'' + \frac{1}{\pi^2} y = \frac{1}{\pi^2 \cos \frac{x}{\pi}}, y(0) = 2, y'(0) = 0.$$

$$2.8. \text{ а) } y' + \frac{y}{x} = \sin x, y(\pi) = \frac{1}{\pi}; \text{ б) } 2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x (1 + \sin x), y(0) = 1;$$

$$\text{в) } y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}, y(0) = 4 \ln 4, y'(0) = 3(3 \ln 4 - 1).$$

$$2.9. \text{ а) } y' + \frac{y}{2x} = x^2, y(1) = 1; \text{ б) } y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x} (1 - x^3), y(0) = -1;$$

$$\text{в) } y'' + y = 4 \operatorname{ctg} x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4.$$

$$2.10. \text{ а) } y' + \frac{2x}{1 + x^2} y = \frac{2x^2}{1 + x^2}, y(0) = \frac{2}{3}; \text{ б) } 3y' + 2xy = 2xy^{-2} e^{-2x^2}, y(0) = -1;$$

$$\text{в) } y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2 + e^{-2x}}, y(0) = 1 + 3 \ln 3, y'(0) = 10 \ln 3.$$

$$2.11. \text{ а) } y' - \frac{2x - 5}{x^2} y = 5, y(2) = 4; \text{ б) } 2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\text{в) } y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$2.12. \text{ а) } y' + \frac{y}{x} = \frac{x + 1}{x} e^x, y(1) = e; \text{ б) } 3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, y(1) = 1;$$

$$\text{в) } y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}, y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4, y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

$$2.13. \quad \text{a) } y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}, y(1) = 1;$$

$$2.14. \quad \text{a) } y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, y(1) = 4;$$

$$2.15. \quad \text{a) } y' + \frac{2y}{x} = x^3, y(1) = 4;$$

$$2.16. \quad \text{a) } y' + \frac{y}{x} = 3x, y(1) = 1;$$

$$2.17. \quad \text{a) } y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2, y(1) = 3;$$

$$2.18. \quad \text{a) } y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, y(1) = 1;$$

$$2.19. \quad \text{a) } y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1;$$

$$2.20. \quad \text{a) } y' + 2xy = -2x^3, y(1) = e^{-1};$$

$$2.21. \quad \text{a) } y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, y(0) = \frac{2}{3};$$

$$2.22. \quad \text{a) } y' + xy = -x^3, y(0) = 3;$$

$$2.23. \quad \text{a) } y' - \frac{2}{x+1} y = e^x (x+1)^2, y(0) = 1;$$

$$2.24. \quad \text{a) } y' + 2xy = x e^{-x^2} \sin x, y(0) = 1;$$

$$2.25. \quad \text{a) } y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, y(0) = \frac{1}{2};$$

$$2.26. \quad \text{a) } y' - y \cos x = -\sin 2x, y(0) = 3;$$

$$2.27. \quad \text{a) } y' - 4xy = -4x^3, y(0) = -\frac{1}{2};$$

$$2.28. \quad \text{a) } y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, y(1) = 1;$$

$$\text{б) } 2y' + 3y \cos x = e^{2x} (2 + 3 \cos x) y^{-1}, y(0) = 1;$$

$$\text{б) } 3(xy' + y) = xy^2, y(1) = 3;$$

$$\text{б) } y' - y = 2xy^2, y(0) = \frac{1}{2};$$

$$\text{б) } 2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}};$$

$$\text{б) } y' + 2xy = 2x^3 y^3, y(0) = \sqrt{2};$$

$$\text{б) } xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = 1;$$

$$\text{б) } 2y' + 3y \cos x = (8 + 12 \cos x) e^{2x} y^{-1}, y(0) = 2;$$

$$\text{б) } 4y' + x^3 y = (x^3 + 8) e^{-2x} y^2, y(0) = 1;$$

$$\text{б) } 8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^2, y(1) = \sqrt{2};$$

$$\text{б) } (y' + y) = xy^2, y(0) = 2;$$

$$\text{б) } y' + xy = (x-1) e^x y^2, y(0) = 1;$$

$$\text{б) } 2y' - 3y \cos x = -e^{-2x} (2 + 3 \cos x) y^{-1}, y(0) = 1;$$

$$\text{б) } y' - y = xy^2, y(0) = 1;$$

$$\text{б) } 2(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 2;$$

$$\text{б) } y' + y = xy^2, y(0) = 1;$$

$$\text{б) } y' + 2ychx = y^2 chx, y(1) = \frac{1}{sh1};$$

$$\text{в) } y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

$$\text{в) } y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}, y(0) = \ln 27, y'(0) = \ln 9 - 1.$$

$$\text{в) } y'' + 4y = 4 \operatorname{ctg} 2x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

$$\text{в) } y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}}, y(0) = 1 + 8 \ln 2, y'(0) = 14 \ln 2.$$

$$\text{в) } y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$\text{в) } y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}, y(0) = 3, y'(0) = 0.$$

$$\text{в) } y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}, y(0) = 3, y'(0) = 0.$$

$$\text{в) } y'' - 2y' = \frac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, y(0) = \ln 4, y'(0) = \ln 4 - 2.$$

$$\text{в) } y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}, y(\pi) = 2, y'(\pi) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{в) } y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2 + e^{-x}}, y(0) = 1 + 3 \ln 3, y'(0) = 5 \ln 3.$$

$$\text{в) } y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2 + e^x}, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$\text{в) } y' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$$

$$\text{в) } y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}, y(0) = 2, y'(0) = 0.$$

$$\text{в) } y'' + y' = \frac{e^x}{2 + e^x}, y(0) = \ln 27, y'(0) = 1 - \ln 9.$$

$$\text{в) } y'' + y = 2 \operatorname{ctg} x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

$$\text{в) } y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}, y(0) = 1 + 2 \ln 2, y'(0) = 3 \ln 2.$$

$$2.29. \quad \text{a) } y' - 3x^2 y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}, y(0)=0;$$

$$\text{б) } 2(y' + xy) = (x-1)e^x y^2, y(0)=2;$$

$$\text{в) } y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1+e^{-x}}, y(0)=0, y'(0)=0.$$

$$2.30. \quad \text{a) } y' - y \cos x = \sin 2x, y(0)=-1;$$

$$\text{б) } y' - y \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} y^4 \sin x, y(0)=1;$$

$$\text{в) } y'' + y = \frac{1}{\sin x}, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

$$2.31. \quad \text{a) } y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, y(1)=1;$$

$$\text{б) } xy' + y = xy^2, y(1)=1;$$

$$\text{в) } y'' + y = \frac{1}{\cos x}, y(0)=1, y'(0)=0.$$

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$3.1. \quad \text{a) } y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2;$$

$$\text{б) } y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x};$$

$$\text{в) } y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x).$$

$$3.2. \quad \text{a) } y''' - y'' = 6x^2 + 3x;$$

$$\text{б) } y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x;$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 6x.$$

$$3.3. \quad \text{a) } y''' - y' = x^2 + x;$$

$$\text{б) } y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x};$$

$$\text{в) } y'' + 2y' = -2e^x (\sin x + \cos x).$$

$$3.4. \quad \text{a) } y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x;$$

$$\text{б) } y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x};$$

$$\text{в) } y'' + y = 2 \cos 7x + 3 \sin 7x.$$

$$3.5. \quad \text{a) } y^{IV} - y''' = 5(x + 2)^2;$$

$$\text{б) } y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x};$$

$$\text{в) } y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x.$$

$$3.6. \quad \text{a) } y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1 - x);$$

$$\text{б) } y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^x;$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 8y = e^x (5 \sin x - 3 \cos x).$$

$$3.7. \quad \text{a) } y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1;$$

$$\text{б) } y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^x;$$

$$\text{в) } y'' - 2y' = e^x (\sin x + \cos x).$$

$$3.8. \quad \text{a) } y^V - y^{IV} = 2x + 3;$$

$$\text{б) } y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x};$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x.$$

$$3.9. \quad \text{a) } 3y^{IV} + y''' = 6x - 1;$$

$$\text{б) } y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^x;$$

$$\text{в) } y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x.$$

$$3.10. \quad \text{a) } y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2;$$

$$\text{б) } y''' - 3y' - 2y = -4xe^x;$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x.$$

$$3.11. \quad \text{a) } y''' - y'' = 5x^2 - 1;$$

$$\text{б) } y''' - 3y' + 2y = (4x + 9)e^{2x};$$

$$\text{в) } y'' + 2y' + 5y = -2 \sin x.$$

$$3.12. \quad \text{a) } y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2;$$

$$\text{б) } y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^x;$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 8y = e^x (-3 \sin x + 4 \cos x).$$

$$3.13. \quad \text{a) } 7y''' - y'' = 12x;$$

$$\text{б) } y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x};$$

$$\text{в) } y'' + 2y' = 10e^x (\sin x + \cos x).$$

$$3.14. \quad \text{a) } y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x;$$

$$\text{б) } y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^x;$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 5x.$$

$$3.15. \quad \text{a) } y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1;$$

$$\text{б) } y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^x;$$

$$\text{в) } y'' + y = 2 \cos 5x + 3 \sin 5x.$$

$$3.16. \quad \text{a) } y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2;$$

$$\text{б) } y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^x;$$

$$\text{в) } y'' + 2y' + 5y = -17 \sin 2x.$$

$$3.17. \quad \text{a) } y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3;$$

$$\text{б) } y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^x;$$

$$\text{в) } y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x.$$

$$3.18. \quad \text{a) } y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x;$$

$$\text{б) } y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x};$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 8y = e^x (3 \sin x + 5 \cos x).$$

$$3.19. \quad \text{a) } y''' - 4y'' = 32 - 384x^2;$$

$$\text{б) } y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x};$$

$$\text{в) } y'' + 2y' = 6e^x (\sin x + \cos x).$$

$$3.20. \quad \text{a) } y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2;$$

$$\text{б) } y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x;$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x.$$

$$3.21. \quad \text{a) } y''' + y'' = 49 - 24x^2;$$

$$\text{б) } y''' - 5y'' + 3y' + 9y = (32x - 32)e^{-x};$$

$$\text{в) } y'' + 2y' + 5y = -\cos x.$$

$$3.22. \quad \text{a) } y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4;$$

$$\text{б) } y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^x;$$

$$\text{в) } y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x.$$

- 3.23. а) $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$; б) $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^x$; в) $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$.
- 3.24. а) $y^{IV} + y''' = x$; б) $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^x$; в) $y'' - 4y' + 8y = e^x(2\sin x - \cos x)$.
- 3.25. а) $y''' - y'' = 6x + 5$; б) $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$; в) $y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x)$.
- 3.26. а) $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$; б) $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}$; в) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 4x$.
- 3.27. а) $y''' - 5y'' + 6y' = (x - 1)^2$; б) $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x$; в) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 8x$.
- 3.28. а) $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$; б) $y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^x$; в) $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$.
- 3.29. а) $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$; б) $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x$; в) $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$.
- 3.30. а) $y^{IV} + y''' = 12x + 6$; б) $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1 - x)e^{-x}$; в) $y'' - 4y' + 8y = e^x(-\sin x + 2\cos x)$.
- 3.31. а) $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5$; б) $y''' + y'' - 6y' = (20x + 14)e^{2x}$; в) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 6x$.

Завдання 4. Дослідити на збіжність ряд.

- 4.1. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$.
- 4.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$; г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.
- 4.5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{(3n+5)2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+5)\ln^2(5n+2)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^2}{n^4 - n^2 + 1}$.
- 4.7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg \frac{5}{n}}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1} \right)^{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\sqrt{2}+1)\ln^2(n\sqrt{3}+1)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n-1)}$.
- 4.9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{\pi}{4n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$.
- 4.11. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \frac{n}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}$.
- 4.13. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n-1} \right)^n (n-1)^2$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.
- 4.15. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n+1)}{3^n(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{2n+1}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$.
- 4.2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n+1)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$.
- 4.4. а); $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n$; в) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$; г) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln \ln n) \ln n}$.
- 4.6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)}{n!} \sin \frac{2}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1} \right)^n (n+1)^3$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(n\sqrt{5}+2)}$; г) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$.
- 4.8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5} \right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4 \sqrt[4]{2n+3}}$.
- 4.10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2-1)}{(n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln 2n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{6n}$.
- 4.12. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$; г) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)}$.
- 4.14. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3} \right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2 n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$.
- 4.16. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n - 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{\frac{\pi}{2}}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cos \frac{\pi}{3\sqrt{n}} \sqrt[3]{3n+\ln n}}$.

$$4.17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n+1)(2n)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n^n}; \text{ в) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n-1)}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(3/2)^n}.$$

$$4.19. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n+1)(2n)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n^n}; \text{ в) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n-1)}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3)}{\ln(n+4)3^n}.$$

$$4.21. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \arctg^n \frac{\pi}{3n}; \text{ в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+5) \ln^2(n+1)}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}.$$

$$4.23. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n (n+2)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} e^{-n}}{1}; \text{ в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\ln n (n^3 + 1)}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

$$4.25. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 5 \cdot 18 \cdot \dots \cdot (2n+5)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3} \right)^{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{3} - 1 \right) \ln^2 \left(\frac{n}{2} \right)}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 3^n}{3^n}.$$

$$4.27. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10nn^2}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n}; \text{ в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{\ln n (2n^2 + 3)}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos \left(\frac{2}{\sqrt{n+4}} \right)}.$$

$$4.29. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sqrt[3]{n}}{3^n + 2}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 3^{n+2}}{5^n}; \text{ в) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{(3n^2/2+2) \ln \left(\frac{n}{2} \right)}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

$$4.31. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(3n)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \arctg^{2n} \frac{\pi}{4n}; \text{ в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-2) \ln(2n)}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}.$$

Завдання 5. Знайти область збіжності функціонального ряду.

$$5.1. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n} \sin(x + \pi n); \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3 (x+3)^{2n}}{2n+3}.$$

$$5.2. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} x^{4n} \sin(2x - \pi n); \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1)5^n}.$$

$$5.3. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^{4n} \sin(x + \pi n); \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n 9^n}.$$

$$5.4. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3} \right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} x^{2n} \cos(x - \pi n); \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}.$$

$$5.5. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{\sqrt[3]{n}} x^{4n} \sin(3x + \pi n); \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}.$$

$$5.6. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n} x^{2n} \sin(5x - \pi n); \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}.$$

$$5.7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt[4]{3n}} x^{2n} \cos(x + \pi n); \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{3^n (x-2)^n}.$$

$$5.8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{2n} x^{2n} \sin(3x - \pi n); \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}.$$

$$5.9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n} \sin \frac{x}{n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n (2n-1)}.$$

$$5.10. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} x^{3n} \sin \frac{x}{2n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}.$$

$$5.11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^{3n} x^n \sin \frac{3x}{\sqrt{n}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}.$$

$$5.12. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^{3n} \sin \frac{3x}{\sqrt{n}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}.$$

$$5.13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^{3n} \operatorname{tg} \frac{3x}{n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} (x+5)^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}.$$

$$5.16. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n} \arcsin \frac{x}{3n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^{n^2}.$$

$$5.19. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n \operatorname{arctg} \frac{2x}{n+1}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

$$5.22. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^2} \sin^{3n} x; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)(x-3)^{2n}}.$$

$$5.25. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \operatorname{tg}^{2n} x; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n (x+3)^n}.$$

$$5.28. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{tg}^n(2x); \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n (x+4)^n}.$$

$$5.31. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}^n(2x); \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}.$$

$$5.14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 8^n x^{3n} \operatorname{tg} \frac{x}{4\sqrt{n}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} (x-2)^n.$$

$$5.17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 16^n x^{3n} \arcsin \frac{x}{\sqrt[3]{n}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}.$$

$$5.20. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n} \operatorname{arctg} \frac{x}{2(n+3)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n^{n+1}}.$$

$$5.23. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 8^n n^2 \sin^{3n} x; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2 (x+2)^n}.$$

$$5.26. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \sin^n(3x); \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^{2n}}{n}.$$

$$5.29. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{tg}^n x; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}.$$

$$5.15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} x^{3n} \operatorname{tg} \frac{2x}{3n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 9^n (x-1)^{2n}}.$$

$$5.18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 32^n x^{5n} \arcsin \frac{x}{\sqrt{n}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!} (x+5)^{2n+1}.$$

$$5.21. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 27^n x^{3n} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2n+3}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4) \ln(n+4)}.$$

$$5.24. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \sin^{2n}(2x); \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{x^n}.$$

$$5.27. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2} \sin^{2n} x; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{(2n+9)^5 (x+2)^{2n}}.$$

$$5.30. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^{n/2}} \operatorname{tg}^n x; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-3)^n}{(n^4+1)^2}.$$

Завдання 6. Розкласти функцію в ряд Маклорена і Тейлора по степенях.

$$6.1. \text{ a) } y = \frac{a}{20-x-x^2}; \text{ б) } y = x^3 + 2x^2 + 3x + 1; x_0 = -1.$$

$$6.2. \text{ a) } y = \frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}; \text{ б) } y = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2; x_0 = 2.$$

$$6.3. \text{ a) } y = \ln(l-x-6x^2); \text{ б) } y = x^5 - 4x^4 + 3x^3 + x^2 - x + 1; x_0 = 3. \quad 6.4. \text{ a) } y = 2x \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - x; \text{ б) } y = x^3 + 8x^2 - x + 1; x_0 = 2.$$

$$6.5. \text{ a) } y = \frac{\operatorname{sh} 2x}{x-2}; \text{ б) } y = x^4 - 3x^2 + 7x - 1; x_0 = -1.$$

$$6.6. \text{ a) } y = \frac{7}{12+x-x^2}; \text{ б) } y = x^5 + 3x^4 - 8x + 5; x_0 = -2.$$

$$6.7. \text{ a) } y = \frac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}; \text{ б) } y = x^6 - 5x^4 + 2x + 6; x_0 = -3.$$

$$6.8. \text{ a) } y = \ln(l+x-6x^2); \text{ б) } y = x^7 - 5x^3 + 8x + 1; x_0 = -1.$$

$$6.9. \text{ a) } y = (x-1) \sin 5x; \text{ б) } y = 5x^8 + 7x^3 + 9; x_0 = 1.$$

$$6.10. \text{ a) } y = \frac{6}{8+2x-x^2}; \text{ б) } y = 4x^7 - 5x^5 + 4x^3 + 5x; x_0 = 1.$$

$$6.11. \text{ a) } y = \frac{\operatorname{sh} 3x - 1}{x^2}; \text{ б) } y = 2x^8 + 5x^3 + 3; x_0 = 2.$$

$$6.12. \text{ a) } y = \frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}; \text{ б) } y = x^4 - 5x^2 + 7x + 3; x_0 = 2.$$

$$6.13. \text{ a) } y = \ln(l-x-12x^2); \text{ б) } y = x^3 - 8x^2 + 5x - 7; x_0 = -1.$$

$$6.14. \text{ a) } y = (3+e^{-x})^2; \text{ б) } y = x^4 - 3x^2 + 7x - 1; x_0 = -1.$$

$$6.15. \text{ a) } y = \frac{\arcsin x}{x} - 1; \text{ б) } y = x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 7x; x_0 = 2.$$

$$6.16. \text{ a) } y = \frac{7}{12-x-x^2}; \text{ б) } y = 5x^3 - 2x^2 + x + 2; x_0 = 2.$$

$$6.17. \text{ a) } y = x^2 \sqrt{4-3x}; \text{ б) } y = 7x^6 - 8x^4 + 3x^2 + 6x; x_0 = 1.$$

$$6.18. \text{ a) } y = \ln(l+2x-8x^2); \text{ б) } y = 8x^5 + 7x^4 + 7x; x_0 = -1.$$

$$6.19. \text{ а) } y = 2x \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - x; \text{ б) } y = x^4 - 3x^2 + 7x; x_0 = 2.$$

$$6.21. \text{ а) } y = \frac{5}{6+x-x^2}; \text{ б) } y = x^8 + 5x^2 - 8x + 9; x_0 = 1.$$

$$6.23. \text{ а) } y = \ln(l+x-12x^2); \text{ б) } y = x^5 + 4x^4 - 7x; x_0 = 1.$$

$$6.25. \text{ а) } y = (\arctg x)/x; \text{ б) } y = 3x^5 + 3x^3 + 8x + 1; x_0 = 3.$$

$$6.27. \text{ а) } y = \sqrt[4]{16-5x}; \text{ б) } y = x^3 - 4x^2 + 2x + 1; x_0 = 2.$$

$$6.29. \text{ а) } y = (2 - e^x)^2; \text{ б) } y = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1; x_0 = -1.$$

$$6.31. \text{ а) } y = \frac{3}{2-x-x^2}; \text{ б) } y = x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2; x_0 = 1.$$

$$6.20. \text{ а) } y = (x-1)\operatorname{sh} x; \text{ б) } y = x^5 - 4x^4 + 3x^2 + 8x; x_0 = -2.$$

$$6.22. \text{ а) } y = x\sqrt[3]{27-2x}; \text{ б) } y = x^7 + 5x^4 - 8x; x_0 = 2.$$

$$6.24. \text{ а) } y = \sin \frac{3x}{x} - \cos 3x; \text{ б) } y = 5x^4 - 8x^3 + 2x; x_0 = 2.$$

$$6.26. \text{ а) } y = \frac{5}{6-x-x^2}; \text{ б) } y = 3x^5 + 3x^3 + 8x + 1; x_0 = 2.$$

$$6.28. \text{ а) } y = \ln(l-x-20x^2); \text{ б) } y = 2x^4 - 3x^2 + 2x - 1; x_0 = -1.$$

$$6.30. \text{ а) } y = (x-1)\operatorname{ch} x; \text{ б) } y = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 3; x_0 = 2.$$

Завдання 7. Розкласти функцію в ряд Фур'є функцію.

$$7.1. f(x)=x^2 \text{ на проміжку } [-2;2].$$

$$7.2. f(x)=|x| \text{ на проміжку } [-2;2].$$

$$7.3. f(x)=\pi-2x \text{ на проміжку } [0;\pi], \text{ продовживши її на } [-\pi;0] \text{ парним способом.}$$

$$7.4. f(x)=\begin{cases} -3, & \text{якщо } -\pi \leq x \leq 0, \\ 3, & \text{якщо } 0 < x \leq \pi \end{cases} \text{ на проміжку } [-\pi;\pi].$$

$$7.5. f(x)=x^3 \text{ на проміжку } [-\pi;\pi].$$

$$7.6. f(x)=x \text{ на проміжку } [-\pi;\pi].$$

$$7.7. f(x)=\pi-2x \text{ на проміжку } [0;\pi], \text{ продовживши її на } [-\pi;0] \text{ непарним способом.}$$

$$7.8. f(x)=e^x \text{ на проміжку } [-\pi;\pi].$$

$$7.9. f(x)=\begin{cases} -3x, & \text{якщо } -\pi \leq x \leq 0, \\ 4, & \text{якщо } 0 < x \leq \pi \end{cases} \text{ на проміжку } [-\pi;\pi].$$

$$7.10. f(x)=\begin{cases} -x, & \text{якщо } -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & \text{якщо } 0 < x \leq \pi \end{cases} \text{ на проміжку } [-\pi;\pi].$$

$$7.11. f(x)=x^3 \text{ на проміжку } [0;\pi], \text{ продовживши її на } [-\pi;0] \text{ парним способом.}$$

$$7.12. f(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо } 0 < x \leq 1, \\ 2-x, & \text{якщо } 1 < x \leq 2 \end{cases} \text{ на проміжку } [0;2] \text{ за косинусами.}$$

$$7.13. f(x)=\cos 2x \text{ на проміжку } [0;\pi] \text{ за синусами.}$$

$$7.14. f(x)=\sin 3x \text{ на проміжку } [0;\pi] \text{ за косинусами.}$$

$$7.15. f(x)=x^2 \text{ на проміжку } [0;\pi], \text{ продовживши її на } [-\pi;0] \text{ непарним способом.}$$

$$7.16. f(x)=x \text{ на проміжку } [0;1] \text{ за косинусами.}$$

$$7.17. f(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо } 0 < x \leq 1, \\ 2-x, & \text{якщо } 1 < x \leq 2 \end{cases} \text{ на проміжку } [0;2] \text{ за синусами.}$$

$$7.18. f(x)=x^2 \text{ на проміжку } [0;1] \text{ за синусами.}$$

$$7.19. f(x)=x+2 \text{ на проміжку } [0;1], \text{ продовживши її на } [-1;0] \text{ непарним способом.}$$

$$7.20. f(x)=x^2+1 \text{ на проміжку } [-2;2]. \quad 7.21. f(x)=\frac{\pi-x}{2} \text{ на проміжку } [-\pi;\pi].$$

$$7.22. f(x)=1+|x| \text{ на проміжку } [-1;1].$$

$$7.23. f(x)=x+2 \text{ на проміжку } [0;1], \text{ продовживши її на } [-1;0] \text{ парним способом.}$$

$$7.24. f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } -\pi \leq x \leq 0, \\ 2x, & \text{якщо } 0 < x \leq \pi \end{cases} \text{ на проміжку } [-\pi;\pi].$$

$$7.25. f(x)=x+1 \text{ на проміжку } [-1;1].$$

$$7.26. f(x)=x^2-1 \text{ на проміжку } [-2;2].$$

$$7.27. f(x)=\frac{\pi+x}{2} \text{ на проміжку } [-\pi;\pi].$$

$$7.28. f(x)=\begin{cases} -1, & \text{якщо } -\pi \leq x \leq 0, \\ 1, & \text{якщо } 0 < x \leq \pi \end{cases} \text{ на проміжку } [-\pi;\pi]. \quad 7.29. f(x)=3x^2 \text{ на проміжку } [-2;2] \text{ за синусами.}$$

$$7.30. f(x)=\begin{cases} 1, & \text{якщо } -\pi < x \leq 0, \\ -2, & \text{якщо } 0 < x \leq \pi \end{cases} \text{ на проміжку } [-\pi;\pi].$$

$$7.31. f(x)=|1-x| \text{ на проміжку } [-1;1].$$

Завдання 8. Обчислити:

- 8.1. а) $(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)$; б) $\operatorname{Ln} 3$. 8.2. а) $\frac{5+i}{1+2i}$; б) $I^{\sqrt{2}}$. 8.3. а) $(1-i\sqrt{3})^3$; б) $\operatorname{Arch} 2i$. 8.4. а) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$; б) $(-2)^{\sqrt{2}}$. 8.5. а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\operatorname{Ln}(-1)$.
- 8.6. а) $\frac{1-2i}{-2+i}$; б) $\operatorname{Arc} \cos 3$. 8.7. а) $(3+3i)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) 2^i . 8.8. а) $\sqrt[3]{i}$; б) 2^{1+i} . 8.9. а) $(2\sqrt{3}-2i)(3+3i)$; б) $\operatorname{Ln} i$. 8.10. а) $\sqrt[4]{-1}$; б) I^{-i} .
- 8.11. а) $\frac{-2+5i}{1-i}$; б) $(1+i)^i$. 8.12. а) $\sqrt{2-i2\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{Ln} \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. 8.13. а) $(1+i\sqrt{3})^4$; б) $\operatorname{Ln}(3-2i)$. 8.14. а) $(\sqrt{3}-i)^5$; б) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$. 8.15. а) $\sqrt[4]{1-i}$; б) $\operatorname{Ln}(1+i)$.
- 8.16. а) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}\right)^{12}$; б) $\operatorname{Arc} \sin i$. 8.17. а) $\frac{(-1+i)(3+3i)}{\sqrt{3}-i}$; б) $\operatorname{Ln}(-3+2i)$. 8.18. а) $\sqrt[5]{-4+3i}$; б) $\operatorname{Arctg}(1+2i)$. 8.19. а) $(-2+5\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}-2i)$; б) $(3-4i)^{1+i}$.
- 8.20. а) $\sqrt{-11-60i}$; б) $\operatorname{Arch} 2i$. 8.21. а) $(-\sqrt{3}+i)^4$; б) $\operatorname{Ln}(1-i\sqrt{3})$. 8.22. а) $\frac{\sqrt{2+4i}}{\sqrt{2}}$; б) $\operatorname{Arctg}(1-i)$. 8.23. а) $\sqrt{-3+4i}$; б) $(-3+4i)^{2+i}$.
- 8.24. а) $(2-i2\sqrt{3})^6$; б) $\operatorname{Ln}(-i+2)$. 8.25. а) $\frac{(1-2i)(2+2i)}{(-4+3i)}$; б) $\operatorname{Arc} \cos 2$. 8.26. а) $\sqrt[5]{3-i}$; б) $\operatorname{Ln}(-1)$. 8.27. а) $(\sqrt{2}+i)^8$; б) $\operatorname{Arth}(1-i)$.
- 8.28. а) $\frac{3-2i}{2+i}$; б) $\operatorname{Arc} \cos(2i)$. 8.29. а) $(\sqrt{5}-2i)(3+4i)$; б) $\operatorname{Ln} \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$. 8.30. а) $\frac{(i-2)(3+2i)}{3-4i}$; б) $\operatorname{Arc} \sin 4$. 8.31. а) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-i\sqrt{3}\right)$; б) $(2-i)^i$.

Завдання 9. Знайти дійсну та уявну частину функції.

- 9.1. $w = z^2$. 9.2. $w = \frac{1}{z}$. 9.3. $w = i\bar{z} + 2z^2$. 9.4. $w = z^3 + 3i$. 9.5. $w = \frac{iz + 1}{\bar{z} - 1}$. 9.6. $w = (i+1)z - i$. 9.7. $w = \cos 2i$.
- 9.8. $w = \sin(2+i)$. 9.9. $w = \operatorname{tg}(1-2i)$. 9.10. $w = z^3$. 9.11. $w = z^2 + 2i$. 9.12. $w = \bar{z} - 2iz^2$. 9.13. $w = \cos(2-i)$. 9.14. $w = \operatorname{tg}(3+3i)$.
- 9.15. $w = \frac{1-z}{z+i}$. 9.16. $w = \sin 3i$. 9.17. $w = iz + 2$. 9.18. $w = \operatorname{ctg}(2+i)$. 9.19. $w = z - 2z$. 9.20. $w = \frac{z^2 - z}{z-i}$. 9.21. $w = \frac{z+1}{z-2i}$.
- 9.22. $w = z^3 - 2i$. 9.23. $w = \cos(3+4i)$. 9.24. $w = \frac{1}{z^3}$. 9.25. $w = (3+2i)z - \bar{z}$. 9.26. $w = \sin(3-2i)$. 9.27. $w = \bar{z}^2 - z + 2i$. 9.28. $w = \operatorname{tg}(4+i)$.
- 9.29. $w = z^2 - (2+i)z$. 9.30. $w = (\sqrt{3}-2i)\bar{z} + 3$. 9.31. $w = \operatorname{tg}(-\sqrt{3}+i)$.

Завдання 10. Довести, що функція w є аналітичною на комплексній площині і знайти її похідну.

- 10.1. $w = e^z$. 10.2. $w = z^4$. 10.3. $w = \sin z$. 10.4. $w = \cos z$. 10.5. $w = \bar{z}$. 10.6. $w = \operatorname{Ln} z$. 10.7. $w = z^2$. 10.8. $w = \cos^3 2z$. 10.9. $w = \frac{z-1}{z}$. 10.10. $w = \frac{1}{z}$.
- 10.11. $w = \sin^2 z$. 10.12. $w = \frac{z}{z-1}$. 10.13. $w = z^3 - 2z$. 10.14. $w = \operatorname{Ln} 3z$. 10.15. $w = \cos^2 z$. 10.16. $w = \sqrt{z}$. 10.17. $w = \sin 4z$. 10.18. $w = e^{z^2}$.
- 10.19. $w = (z+1)^2$. 10.20. $w = z^2 - 6z + 1$. 10.21. $w = \frac{1}{z^2}$. 10.22. $w = e^{2z}$. 10.23. $w = \operatorname{Ln} 2z$. 10.24. $w = \frac{1}{z^4}$. 10.25. $w = \sin^3 z$. 10.26. $w = \sqrt[3]{z}$. 10.27. $w = e^{z^3}$.
- 10.28. $w = z^5$. 10.29. $w = \bar{z}^2$. 10.30. $w = \cos 3z$. 10.31. $w = \sqrt{\bar{z}}$.

Завдання 11. Знайти аналітичну функцію аргументу z , якщо дійсна частина якої дорівнює:

11.1. $x^3 - 3xy^2$. 11.2. $x^3y - \sin x$. 11.3. $2e \sin y$. 11.4. $y + \cos xy$. 11.5. $2x^2 - 2y^2 + x$. 11.6. $2 \cos y$. 11.7. $x^2 + y$. 11.8. $\sin x + \sin y$. 11.9. $2xy + 3x$.
 11.10. $2x - \sin xy$. 11.11. $x^2 - 2xy + y$. 11.12. $\sin^2 x + \cos x$. 11.13. $y - xy + x^2$. 11.14. $y^3x - \cos y$. 11.15. $\sin x - \cos^2 x$. 11.16. $y^2 + x + \cos x + \sin^2 x$.
 якщо уявна частина якої дорівнює:
 11.17. $2xy + 3x$. 11.18. $\sin^2 x - \cos x$. 11.19. $x^3y + \sin x$. 11.20. $x^3 - 3xy^2$. 11.21. $\sin x - \cos^2 x$. 11.22. $\cos y$. 11.23. $y^2 + x + \sin^2 x$. 11.24. $y^2 + x$.
 11.25. $y^3x - \cos y$. 11.26. $\sin x + \sin y$. 11.27. $2 \sin x$. 11.28. $2y - xy + x^2$. 11.29. $x^2 - 2xy + y$. 11.30. $\cos 2x - \sin 2x$. 11.31. $2x - \sin xy$.

Завдання 12. Обчислити інтеграл $\int_C f(z) dz$, де:

12.1. $f(z) = x^2 + i2xy, C$ – відрізок, що з'єднує точки $z_1 = i, z_2 = 1 + 2i$. 12.2. $f(z) = 2x - iy, C$ – відрізок, що з'єднує точки $z_1 = 0, z_2 = 2 - i$.
 12.3. $f(z) = z \operatorname{Im} z^2, C$ – півколо $|z| = 4, -\pi \leq \arg z \leq 0$. 12.4. $f(z) = |z|, C$ – відрізок, що з'єднує точки $z_1 = 1, z_2 = -1 + i$.
 12.5. $f(z) = 3z^2 + 4z + 1, C$ – відрізок, що з'єднує точки $z_1 = -1 + i, z_2 = 1 - i$. 12.6. $f(z) = \frac{e^z}{z(z-i)}, C$ – коло радіуса 1 з центром у точці $4i$.
 12.7. $f(z) = \frac{\cos z}{(z-i)^3}, C$ – коло $|z-i| = 2$. 12.8. $f(z) = x - y + ix^2, C$ – ламана, що складається з відрізків $y = 0, 0 \leq x \leq 1, ix = 1, 0 \leq y \leq 1$.
 12.9. $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 + 9}, C$ – коло $|z| = 2$. 12.10. $f(z) = x - y + ix^2, C$ – відрізок, що з'єднує точки $z_1 = 0, z_2 = 1 + i$.
 12.11. $f(z) = x + ix^2 - y, C$ – ламана, що складається з відрізків $x = 0, 0 \leq y \leq 1, y = 1, 0 \leq x \leq 1$. 12.12. $f(z) = \cos \frac{z}{2}, C$ – відрізок, що з'єднує точки $z_1 = 0, z_2 = 3 + 2i$.
 12.13. $f(z) = \frac{e^z}{z^2 - 1}, C$ – коло $|z| = 4$. 12.14. $f(z) = \frac{2z^2 - z + 1}{z - 1}, C$ – коло $|z| = 2$. 12.15. $f(z) = \frac{\sin z}{z + i}, C$ – коло $|z + i| = 3$.
 12.16. $f(z) = \frac{1}{z^2 + 9}, C$ – коло $|z - 2i| = 2$. 12.17. $f(z) = \frac{chz}{(z+1)^3(z-1)}, C$ – коло $|z| = 2$. 12.18. $f(z) = \frac{1}{z^2 + 9z}, C$ – коло $|z| = 5$. 12.19. $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4z}, C$ – коло $|z| = 3$.
 12.20. $f(z) = |z|, C$ – півколо $|z| = 4, 0 \leq \arg z \leq \pi$. 12.21. $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 9)(z + 9)}, C$ – коло $|z| = 4$. 12.22. $f(z) = 1 + 4iz^3, C$ – відрізок, що з'єднує точки $z_1 = -i, z_2 = i$.
 12.23. $f(z) = 4z^3 - 2z^2 + z, C$ – відрізок, що з'єднує точки $z_1 = -i, z_2 = 1 - 2i$. 12.24. $f(z) = \frac{1}{z^2 + 9}, C$ – коло $|z + 2i| = 2$. 12.25. $f(z) = |z|, C$ – півколо $|z| = 1, -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$.
 12.26. $f(z) = (z + 2)^2, C$ – відрізок, що з'єднує точки $z_1 = -2, z_2 = -2 + i$. 12.27. $f(z) = \frac{e^z}{z^2 - 1}, C$ – коло $|z| = 3$. 12.28. $f(z) = \frac{e^z}{z^2 - 4}, C$ – коло $|z| = 9$.
 12.29. $f(z) = \frac{ze^z}{(z+i)^3}, C$ – коло $|z+i| = 2$. 12.30. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2 + 4}, C$ – коло $x^2 + y^2 + 6y = 0$. 12.31. $f(z) = \frac{\cos z}{(z-i)^4}, C$ – коло $|z-i| = 1$.

Завдання 13. Знайти: 1) особливі точки заданих функцій та з'ясувати їх характер; 2) лишки функцій.

13.1. а) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$; б) $f(z) = \frac{z}{e^z + 2}$. 13.2. а) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$; б) $f(z) = \operatorname{tg} z$. 13.3. а) $f(z) = \frac{z^2 - 6z - 5}{z^2 - 2z + 1}$; б) $f(z) = \frac{e^{z-1}}{z(z+1)}$.

$$\begin{array}{lll}
13.4. \text{ a) } f(z) = 3z^2 - z + 1; \text{ б) } f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2,5} . & 13.5. \text{ a) } f(z) = \cos \frac{1}{z+3i}; \text{ б) } f(z) = \sin \frac{1}{z} . & 13.6. \text{ a) } f(z) = \frac{1}{e^{z+2i}}; \text{ б) } f(z) = \frac{e^z}{(z+3)(z-2)^3} . \\
13.7. \text{ a) } f(z) = \frac{\operatorname{tg}(z+1)}{z+1}; \text{ б) } f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^3} . & 13.8. \text{ a) } f(z) = z \operatorname{sh} \frac{1}{z}; \text{ б) } f(z) = \frac{\sin 3z}{(1+z)^2} . & 13.9. \text{ a) } f(z) = \frac{1}{z^5 + 2z^4 + z^3}; \text{ б) } f(z) = \frac{e^z}{z-1} . \\
13.10. \text{ a) } f(z) = \frac{\sin z}{z^4}; \text{ б) } f(z) = e^{1/z} \cos z . & 13.11. \text{ a) } f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 1}; \text{ б) } f(z) = z \cos \frac{1}{z^2} . & 13.12. \text{ a) } f(z) = \frac{\sin z}{z^3}; \text{ б) } f(z) = \frac{z}{(z-2)^2(1+z)^4} . \\
13.13. \text{ a) } f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}; \text{ б) } f(z) = \frac{e^z}{z-1} . & 13.14. \text{ a) } f(z) = \sin \frac{1}{z}; \text{ б) } f(z) = \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} . & 13.15. \text{ a) } f(z) = e^{1/z} \cos z; \text{ б) } f(z) = \frac{\sin z}{z^4} . \\
13.16. \text{ a) } f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}; \text{ б) } f(z) = \frac{\sin z}{z^3} . & 13.17. \text{ a) } f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z^2}; \text{ б) } f(z) = \frac{1}{3z^2 - 2z + 4} . & 13.18. \text{ a) } f(z) = \frac{z}{(z-2)(z+3)^2}; \text{ б) } f(z) = \frac{\operatorname{tg}(z+1)}{z+1} . \\
13.19. \text{ a) } f(z) = \operatorname{tg} z; \text{ б) } f(z) = \frac{1-e^z}{z^2} . & 13.20. \text{ a) } f(z) = \frac{\sin 2z}{(1+z)^2}; \text{ б) } f(z) = e^{\frac{1}{z+2i}} . & 13.21. \text{ a) } f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)}; \text{ б) } f(z) = z \operatorname{sh} \frac{1}{z} . \\
13.22. \text{ a) } f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^3}; \text{ б) } f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z^3 + 2z} . & 13.23. \text{ a) } f(z) = \sin \frac{1}{z^2}; \text{ б) } f(z) = \cos \frac{1}{z+2i} . & 13.24. \text{ a) } f(z) = \frac{e^z}{(2+z)(z-3)^3}; \text{ б) } f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z} . \\
13.25. \text{ a) } f(z) = \frac{z}{3+e^z}; \text{ б) } f(z) = \frac{z}{(1+z)^2} . & 13.26. \text{ a) } f(z) = \frac{e^{z-1}}{z(z+1)^2}; \text{ б) } f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z} . & 13.27. \text{ a) } f(z) = \frac{z}{(z-3)^2 + 0,25}; \text{ б) } f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)} . \\
13.28. \text{ a) } f(z) = \frac{e^z}{1+z^2}; \text{ б) } f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2} . & 13.29. \text{ a) } f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}; \text{ б) } f(z) = \frac{e^z}{(3+z)(z-1)^3} . & 13.30. \text{ a) } f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}; \text{ б) } f(z) = \sin \frac{z}{z+1} . \\
13.31. \text{ a) } f(z) = \sin \frac{1}{1-z}; \text{ б) } f(z) = \frac{z}{(z-2)^2(1+z)^3} . & &
\end{array}$$

Завдання 14. Розкласти в ряд Лорана вказані функції і встановити області збіжності одержаних рядів.

$$\begin{array}{lll}
14.1. f(z) = \frac{1}{z^2 + z - 6}, z_0 = 2 . & 14.2. f(z) = \frac{1}{z^2 - z}, z_0 = 1 . & 14.3. f(z) = \frac{z}{(1+z)^2}, z_0 = -1 . \\
14.5. f(z) = \frac{1}{(1+z^2)(3+z)}, 0 < |z| < 1 . & 14.6. f(z) = \frac{2z-3}{z^2 - 3z + 2}, z_0 = 1 . & 14.7. f(z) = \sin \frac{1}{z-2}, z_0 = 2 . \\
14.9. f(z) = \frac{1}{z(1-z)}, 0 < |z| < 1 . & 14.10. f(z) = \frac{1}{(1+z^2)(3+z)}, 1 < |z| < 9 . & 14.11. f(z) = \frac{1}{1+z^2}, 0 < |z-i| < 2 . \\
14.13. f(z) = z^2 + 4z + 4, z_0 = \infty . & 14.14. f(z) = \frac{1}{(1+z^2)(3+z)}, 9 < |z| < +\infty . & 14.15. f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}, z_0 = 0 . \\
14.17. f(z) = \frac{e^{z-1}}{z}, z_0 = 0 . & 14.18. f(z) = \cos \frac{z}{z-3}, z_0 = 3 . & 14.19. f(z) = 3z^2 - z + 1, z_0 = \infty . \\
14.4. f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z}, z_0 = 0 . & & 14.8. f(z) = \cos \frac{z}{z-4}, z_0 = 4 . \\
14.12. f(z) = \sin \frac{z}{z-6}, z_0 = \infty . & & 14.16. f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6}, 0 < |z| < 2 . \\
14.20. f(z) = \sin \frac{z}{z+2}, z_0 = \infty . & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
14.21. f(z) &= \frac{(z^2 - 6z - 5)}{(z^2 - 2z + 1)}, z_0 = 1. & 14.22. f(z) &= \frac{1}{z^2 - z - 6}, 3 < |z| < +\infty. & 14.23. f(z) &= \frac{\sin z}{z^3}, z_0 = 0. & 14.24. f(z) &= \frac{1}{1 + z^2}, 2 < |z - i| < +\infty. \\
14.25. f(z) &= \frac{1}{z^2 - z}, z_0 = 0. & 14.26. f(z) &= \frac{1}{z^2 - z - 6}, 2 < |z| < 3. & 14.27. f(z) &= \frac{(z + 1)}{(z^2 - 3z + 2)}, z_0 = 2. & 14.28. f(z) &= \frac{1}{z(1 - z)}, 1 < |z| < +\infty. \\
14.29. f(z) &= \frac{2z - 3}{z^2 - 3z + 2}, z_0 = 2. & 14.30. f(z) &= e^{\frac{z}{z-1}}, z_0 = 2. & 14.31. f(z) &= z^3 \cos \frac{1}{z-2}, z_0 = 2.
\end{aligned}$$

Завдання 15. Використовуючи теореми про лишки, обчислити інтеграли $\int_C f(z)dz$ або $\int_a^b f(x)dx$, де:

$$\begin{aligned}
15.1. f(z) &= \frac{z}{(z-1)^2 + 0,25}, C - \text{коло } |z-2| = 3. & 15.2. f(z) &= \frac{e^z}{z^2(z-1)^2}, C - \text{коло } |z| = 5. & 15.3. f(z) &= \frac{1}{z^2 - z - 6}, C - \text{коло } |z| = 4. \\
15.4. f(z) &= \frac{\sin^2 x}{1 + x^2}, (a; b) = (0; +\infty). & 15.5. f(z) &= \frac{z^2}{1 + z^4}, C - \text{коло } |z| = 2. & 15.6. f(z) &= \frac{e^z}{z(z-1)}, C - \text{коло } |z| = 2. \\
15.7. f(z) &= \frac{z}{1 + z^2}, C - \text{коло } |z-i| = 1. & 15.8. f(z) &= \operatorname{tg} z, C - \text{коло } |z| = 2. & 15.9. f(z) &= \frac{2z-3}{z^2 - 3z + 2}, C - \text{коло } |z| = 3. \\
15.10. f(z) &= \frac{e^z}{(z+3)(z-2)^2}, C - \text{коло } |z| = 4. & 15.11. f(z) &= \frac{\sin z}{z^3}, C - \text{коло } |z| = 2. & 15.12. f(z) &= \frac{\cos 2x}{(p - \cos 2x)^2 + \sin^2 2x}, (a; b) = (0; 2\pi). \\
15.13. f(z) &= \frac{z+1}{z^2 - 3z + 2}, C - \text{коло } |z| = 5. & 15.14. f(z) &= \frac{x \sin x}{1 + x^2}, (a; b) = (0; +\infty). & 15.15. f(z) &= \frac{1}{z^2 - z - 6}, C - \text{коло } |z| = 2. \\
15.16. f(z) &= \frac{e^z}{z^3(z-1)}, C - \text{коло } |z-2i| = 3. & 15.17. f(z) &= \frac{1}{(1+x^2)^3}, (a; b) = (-\infty; +\infty). & 15.18. f(z) &= \frac{z}{(z-2)^2(z+1)^3}, C - \text{коло } |z-1| = 3. \\
15.19. f(z) &= \frac{1}{(z^2+1)(2+z)}, C - \text{коло } |z-i| = 5. & 15.20. f(z) &= \frac{1}{(1-2p \cos x + p^2)}, (a; b) = (0; 2\pi). & 15.21. f(z) &= \frac{e^{z-1}}{z(z+1)}, C - \text{коло } |z| = 4. \\
15.22. f(z) &= \frac{z^2}{(1+z^2)^2}, C - \text{коло } |z| = 2. & 15.23. f(z) &= \frac{1}{z(1-z)}, C - \text{коло } |z+2| = 4. & 15.24. f(z) &= \frac{e^{z-1}}{z^2(z+1)^3}, C - \text{коло } |z| = 3. \\
15.25. f(z) &= \frac{\sin 2z}{(1+z)^4}, C - \text{коло } |z| = 2. & 15.26. f(z) &= \frac{\sin^2 x}{a + b \cos x}, (a > b > 0), (a; b) = (0; 2\pi). & 15.27. f(z) &= \frac{z}{3 + e^z}, C - \text{коло } |z+1| = 4. \\
15.28. f(z) &= \frac{1}{z^2 + z - 6}, C - \text{коло } |z| = 4. & 15.29. f(z) &= \frac{x^2}{(1+x^2)^4}, (a; b) = (0; +\infty). & 15.30. f(z) &= \frac{e^z}{(z-2)(z+1)^3}, C - \text{коло } |z-1| = 3. \\
15.31. f(z) &= \frac{1}{(1-z)^3(z-2)}, C - \text{коло } |z| = 3.
\end{aligned}$$